На правах рукописи

Аленина Татьяна Геннадьевна

ДВОЙСТВЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА АФФИННО-МЕТРИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТИ

01.01.04 – геометрия и топология

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2010

Работа выполнена на кафедре геометрии ГОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Столяров Алексей Васильевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Игошин Владимир Александрович

кандидат физико-математических наук, профессор
Султанов Адгам Яхиевич

Ведущая организация: Московский педагогический государственный университет

Защита состоится 7 октября 2010 года в __ часов __ минут на заседании диссертационного совета Д. 212. 081. 10 при Казанском государственном университете им. В. И. Ульянова-Ленина по адресу: 420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37, НИИММ, ауд.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке имени Н. И. Лобачевского Казанского государственного университета им. В. И. Ульянова-Ленина (г. Казань, ул. Кремлевская, 18).

Автореферат разослан «__» ________2010 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
канд. физ.-мат. наук, доцент Липачёв Е. К.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Постановка вопроса и актуальность темы.

В дифференциальной геометрии важное место занимает теория связностей в различных расслоенных пространствах, а также ее применение при исследовании оснащенных подмногообразий, погруженных в однородные и обобщенные пространства.

История теории связностей начинается с 1917 года с работы Т. Леви-Чивита [20] о параллельном перенесении вектора в римановой геометрии. Г. Вейль [21] для построения единой теории поля ввел понятие пространства аффинной связности.

Новый этап в развитии теории связностей открыли работы Э. Картана [4] в 20-х годах XX века, в которых касательные векторные пространства заменялись аффинными, проективными или конформными пространствами. В середине XX века В. В. Вагнер [1], [2] и Ш. Эресман [19] независимо друг от друга ввели общее понятие связности в расслоенном пространстве.

А. П. Норден [9] разработал метод нормализации, позволяющий в касательных расслоениях подмногообразий проективного пространства индуцировать аффинные связности без кручения. Г. Ф. Лаптев [5], следуя идеям Э. Картана, линейные связности определяет как множества отображений бесконечно близких слоев расслоения, соответствующих касательным векторам базисного многообразия.

В 50-х годах XX века Г. Ф. Лаптевым [5] был развит новый инвариантный аналитический метод дифференциально-геометрических исследований многообразий, вложенных в однородные пространства и пространства с фундаментально-групповой связностью. С использованием этого метода задача сводится к изучению геометрии подмногообразия посредством исследования дифференциально-геометрических структур, индуцированных полями фундаментальных, охваченных и оснащающих объектов подмногообразия.

В 70-х годах XX века обобщенная теория распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности $\mathrm{P}_{n,n}$ (в частности, в проективном пространстве P_n) получила развитие в инвариантной аналитической форме в работах Г. Ф. Лаптева и Н. М. Остиану (см. [7], [8], [11], [12]). А. В. Столяров [14] строит инвариантную двойственную теорию регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов, а также регулярного распределения гиперплоскостных элементов в пространстве проективной связности $\mathrm{P}_{n,n}$.

Согласно А. П. Нордену [9], пространством n измерений с проективной метрикой или пространством K_n называется такое пространство, образом точки которого является точка проективного пространства, а фундаментальной группой – подгруппа проективных преобразований, сохраняющих некоторый поляритет (абсолют). Этот поляритет называется абсолютным поляритетом пространства K_n. В монографии А. П. Нордена изучаются некоторые вопросы геометрии пространства K_n с невырожденным абсолютом Q_{n-1}. В случае, когда абсолют Q_{n-1} овального типа, поляритет называется гиперболическим.

В работе Г. Ф. Лаптева [5] вводится понятие пространства проективно-метрической связности $K_{n,n}$: пространство $K_{n,n}$ есть пространство проективной связности $P_{n,n}$, обладающее инвариантным полем локальных гиперквадрик Q_{n-1} (локальных абсолютов). А. В. Столяровым [17] найдено инвариантное аналитическое условие, при выполнении которого пространство $P_{n,n}$ становится пространством проективно-метрической связности $K_{n,n}$.

А. В. Столяров показал [15], что с пространством аффинной связности $A_{n,n}$ ассоциируется расширенное пространство аффинной связности $P_{n,n} \equiv A^*_{n,n}$. Ввел понятие пространства аффинно-метрической связности $M_{n,n}$: пространство аффинной связности $A_{n,n}$, называется пространством аффинно-метрической связности $M_{n,n}$, если расширенное пространство $A^*_{n,n}$ является пространством проективно-метрической связности $K_{n,n}$.

Объектом исследования настоящей работы являются: пространство аффинно-метрической связности $M_{n,n}$; гиперполосное распределение m-мерных линейных элементов H, погруженное в пространство аффинно-метрической связности $M_{n,n}$; гиперповерхность в пространстве аффинно-метрической связности $M_{n,n}$.

Эти исследования являются актуальными и представляют большой научный интерес, ибо:

1) изучение геометрии нормализованного пространства аффинно-метрической связности $M_{n,n}$ до настоящего времени находилась в начальной стадии;

2) исследования по разработке двойственной теории как голономных, так и неголономных подмногообразий, вложенных в пространство аффинно-метрической связности $M_{n,n}$, ранее геометрами не проводились;

3) представляет научный интерес изучение геометрии гиперповерхности в пространстве аффинно-метрической связности.

2. Цель работы. Целью настоящего диссертационного исследования является инвариантное построение двойственной геометрии некоторых оснащенных многообразий, погруженных в пространство аффинно-метрической связности $M_{n,n}$, на основе широкого привлечения их двойственных образов. Достижение поставленной цели включают в себя решение следующих ключевых задач:

1) инвариантным образом построить основы двойственной теории аффинных связностей, индуцируемых нормализацией пространства аффинно-метрической связности $M_{n,n}$;

2) исследовать дифференциально-геометрические структуры, внутренним образом определяемые нормализацией гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов H в $M_{n,n}$;

3) проводить изучения двойственной геометрии оснащенной в смысле А. П. Нордена регулярной гиперповерхности, погруженной в пространство аффинно-метрической связности $M_{n,n}$.

3. Методы исследования. В диссертационной работе используются инвариантные методы дифференциально-геометрических исследований, а именно, метод продолжений и охватов Г. Ф. Лаптева [5], метод внешних дифференциальных форм Э. Картана [18] и метод нормализации А. П. Нордена [9]. Использование указанных методов позволило:

1) исследование геометрии оснащенных подмногообразий пространства $M_{n,n}$ провести инвариантным образом путем построения и изучения полей геометрических объектов, охваченных полями фундаментальных и оснащающих объектов;

2) изучать дифференциально-геометрические факты исследуемых подмногообразий, связанные с дифференциальными окрестностями до третьего порядка включительно.

Все исследования проведены в минимально специализированных системах отнесения, что позволило получить результаты в инвариантной форме.

Результаты по геометрии связностей получены с применением теории связностей в расслоенных пространствах в форме, данной Г. Ф. Лаптевым [3], [5], [6], [10].

4. Научная новизна. Все результаты, полученные в диссертационном исследовании в ходе решения поставленных задач, являются новыми. Научная новизна обусловлена тем, что до настоящего времени в математической литературе геометрия оснащенных подмногообразий, погруженных в пространство аффинно-метрической связности $M_{n,n}$, оставалась практически не разработанной.

5. Теоретическая и практическая значимость. Диссертационная работа имеет теоретическое значение. Полученные в ней результаты дополняют исследования по изучению оснащенных подмногообразий, погруженных в пространства аффинной и проективной связностей $A_{n,n}$ и $P_{n,n}$, и могут быть использованы при дальнейшем изучении различных подмногообразий (как голономных, так и неголономных), погруженных в пространство аффинно-метрической связности $M_{n,n}$.

Теория, разработанная в диссертации, может быть использована в качестве специальных и факультативных лекционных курсов для студентов старших курсов и аспирантов математических факультетов, а также при выполнении ими курсовых, дипломных и научных работ.

6. Апробация. Основные результаты диссертации доказывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях по современным проблемам геометрии:

– на заседаниях научно-исследовательского семинара молодых исследователей при кафедре геометрии Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева (г. Чебоксары , 2007 – 2009 гг.);

– на научных конференциях аспирантов, докторантов и научных сотрудников Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева (г. Чебоксары, 2007 – 2009 гг.);

– на 6-ой, 7-ой, 8-ой молодежной научной школе-конференции «Лобачевские чтения» (г. Казань, 2007-2009 гг.);

– на XLVII Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс» (г. Новосибирск, 2009 г.);

– на Международной научной конференции «Лаптевские чтения – 2009» (г. Москва – г. Тверь, 2009 г.).

7. Публикации. Основные научные результаты, включенные в диссертационную работу, опубликованы в 16 печатных работах автора (см. [1]-[16]).

8. Вклад автора в разработку избранных проблем. Диссертация является самостоятельным исследованием автора. Все опубликованные научные работы по теме исследования выполнены без соавторов.

9. Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения (исторический обзор, общая характеристика и содержание диссертации), трех глав и списка литературы, включающего 94 наименования. Полный объем диссертации составляет 103 страницы машинописного текста.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В **первой главе** изучается двойственная геометрия нормализованного пространства аффинной связности $\mathrm{A}_{n,n}$ и пространства аффинно-метрической связности $\mathrm{M}_{n,n}$.

В начале главы (§ 1, п. 1, 2) приводится материал, носящий реферативный характер и необходимый для дальнейшего изложения. Здесь отражены пути подхода геометров к определению понятия связности в присоединенном расслоенном многообразии, приведены: 1) формулировка теоремы Картана-Лаптева; 2) определение понятия пространства аффинно-метрической связности, 3) критерий того, что пространство аффинной связности $\mathrm{A}_{n,n}$ является пространством аффинно-метрической связности $\mathrm{M}_{n,n}$.

В п. 2 § 1 вводится понятие расширенного пространства аффинной связности $\mathrm{P}_{n,n} \equiv \mathrm{A}^*_{n,n}$.

Определены понятия развертки пространства аффинно-метрической связности $\mathrm{M}_{n,n}$ на аффинно-метрическое пространство M_n вдоль некоторой кривой на базе и развертки этой кривой; найдена квадратичная форма $ds^2 \cong -\dfrac{f^2}{c} a_{IJ}\omega_0^I\omega_0^J$, определяющая метрику пространства аффинно-метрической связности $\mathrm{M}_{n,n}$.

Пространство аффинной связности по аналогии с определением, введенным А. П. Норденом [9] для проективного пространства P_n, называется нормализованным (оснащенным по А. П. Нордену), если в расширенном пространстве $A^{*}_{n,n}$ задано поле ковектора $c^0_{\bar J}$, $c_0 \neq 0$. Методом продолжений и охватов Г. Ф. Лаптева [5] в первых трех дифференциальных окрестностях нормализованного пространства аффинной связности построены поля тензоров c_I, a^0_{IJ}, Λ_I, A_{IJK}, B_{IJK}; при этом тензор a^0_{IJ} предполагается невырожденным, то есть рассматривается невырожденная [14] нормализация пространства $A^{*}_{n,n}$. По аналогии с нормализованным проективным пространством P_n [9] нормализация пространства $P_{n,n} \equiv A^{*}_{n,n}$ с полем симметрического тензора a^0_{IJ} называется гармонической.

С использованием теории связностей в расслоенных пространствах в форме, данной Г. Ф. Лаптевым [5], [6], получен (§ 2, п. 3) один из центральных результатов первой главы: с пространством аффинной связности $A_{n,n}$, нормализованным полем ковектора $c^0_{\bar I}$ невырожденным образом, ассоциируются четыре пространства проективной связности $\overset{p}{P}_{n,n} (p = 1,2,3,4)$, $\overset{1}{P}_{n,n} \equiv A^{*}_{n,n}$ нормализованные невырожденным образом полем ковектора $c^0_{\bar I} (c^0_0 = -1)$, причем эти пространства попарно двойственны относительно соответствующих инволютивных преобразований $J_a (a = 1,2,3)$ форм связности; при этом гармоничность нормализации одного из пространств $\overset{p}{P}_{n,n}$ влечет гармоничность нормализации других (теорема I.1).

Доказано (§ 2, п. 4), что при невырожденной нормализации пространства аффинной связности $A_{n,n}$ индуцируются четыре двойственные между собой (относительно инволютивных преобразований J_a) пространства аффинной связности $\overset{p}{A}_{n,n}$ (теорема I.2).

В § 3, п. 1доказано, что:

1) аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ пространств $\overset{1}{A}_{n,n}$ и $\overset{2}{A}_{n,n}$, индуцируемые невырожденной нормализацией пространства аффинной связности $A_{n,n}$, являются обобщенно сопряженными [9] относительно поля тензора a^0_{IJ} (теорема I.3);

2) пространства $\overset{1}{A}_{n,n}$ и $\overset{2}{A}_{n,n}$, индуцируемые невырожденной нормализацией пространства аффинной связности $A_{n,n}$, могут быть пространствами с абсолютным параллелизмом [9], [13] лишь одновременно (теорема I.4);

3) если из четырех пространств аффинной связности $\overset{p}{A}_{n,n}$, индуцируемых невырожденной нормализацией пространства аффинной связности $A_{n,n}$, любые три – без кручения, то четвертое пространство также имеет нулевое кручение (теорема I.5).

Пункт 2 § 3 первой главы посвящен нахождению критерия того, что каждое из двойственных пространств аффинной связности $\overset{p}{\mathrm{A}}_{n,n}$, индуцируемых невырожденной *гармонической* нормализацией пространства аффинно-метрической связности $\mathrm{M}_{n,n}$, является пространством аффинно-метрической связности (теоремы I.6, I.7).

Доказано (§ 3, п. 2), что если каждое из двойственных пространств $\overset{p}{\mathrm{A}}_{n,n}$, индуцируемых невырожденной гармонической нормализацией пространства аффинно-метрической связности $\mathrm{M}_{n,n}$, имеет нулевое кручение, то любое из них есть пространство аффинно-метрической связности тогда и только тогда, когда нормализация пространства $\mathrm{M}_{n,n}$ является полярной [9] относительно поля локальных абсолютов Q^2_{n-1}; при этом пространства $\overset{p}{\mathrm{A}}_{n,n}$ вырождаются в одно пространство $\overset{1}{\mathrm{A}}_{n,n}$ (теорема I.8).

В **главе II** диссертации изучается двойственная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов H, погруженного в пространство аффинно-метрической связности $\mathrm{M}_{n,n}$.

В § 1, п.1 записаны дифференциальные уравнения подмногообразия H, приведены поля его фундаментальных и некоторых охваченных геометрических объектов.

Центральным результатом п. 2 § 1 является теорема II.1: регулярное гиперполосное распределение m-мерных линейных элементов H, заданное в расширенном пространстве аффинной связности $\mathrm{A}^*_{n,n}$, во 2-й дифференциальной окрестности его образующего элемента индуцирует: 1) пространство проективной связности $\overline{\mathrm{P}}_{n,n}$, двойственное расширенному пространству аффинной связности $\mathrm{A}^*_{n,n}$, причем пространства $\mathrm{A}^*_{n,n}$ и $\overline{\mathrm{P}}_{n,n}$ могут быть плоскими лишь одновременно; 2) многообразие $\overline{\mathrm{H}}$ в $\overline{\mathrm{P}}_{n,n}$, двойственное исходному распределению H.

В п. 3 § 1 главы II найдено (при задании регулярного гиерполосного распределения H в $\mathrm{A}_{n,n}$) условие существования пространства аффинной связности, двойственного исходному пространству $\mathrm{A}_{n,n}$.

Основной результат п. 3 § 1 содержится в теореме II.2: для того чтобы при задании регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов H в $\mathrm{A}_{n,n}$ индуцировалось пространство аффинной связности $\overline{\mathrm{A}}_{n,n}$, двойственное исходному, необходимо и достаточно, чтобы слоевые формы θ^i_n, θ^v_n пространства $\mathrm{A}_{n,n}$ обращались в нуль.

Найдены соотношения, связывающие компоненты тензоров кривизны и кручения двойственных пространств аффинной связности $\mathrm{A}_{n,n}$ и $\overline{\mathrm{A}}_{n,n}$.

Геометрическое истолкование условия существования пространства $\overline{\mathrm{A}}_{n,n}$

заключается в следующем: для того чтобы при задании регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов Н в $\mathrm{A}_{n,n}$ индуцировалось пространство аффинной связности $\overline{\mathrm{A}}_{n,n}$, двойственное исходному, достаточно, чтобы направление A_0A_n в связности пространства $\mathrm{A}_{n,n}$ переносилось параллельно вдоль любой кривой пространства $\mathrm{A}_{n,n}$; в случае аффинного пространства $\mathrm{A}_{n,n} \equiv \mathrm{A}_n$ справедливо и обратное утверждение.

Пункт 4 § 1 посвящен нахождению критерия того, что пространство $\overline{\mathrm{P}}_{n,n}$ является пространством проективно-метрической связности $\overset{0}{\overline{\mathrm{K}}}_{n,n}$ без кручения, двойственное пространству $\mathrm{K}^*_{n,n}$ без кручения (теорема II.4). Найдено условие (§ 1, п. 4), при котором пространство $\overset{0}{\overline{\mathrm{K}}}_{n,n}$ является ассоциированным с некоторым пространством аффинно-метрической связности $\overset{0}{\overline{\mathrm{M}}}_{n,n}$ без кручения; при выполнении последнего пространства $\overset{0}{\mathrm{M}}_{n,n}$ и $\overset{0}{\overline{\mathrm{M}}}_{n,n}$ являются двойственными пространствами аффинно-метрической связности.

Доказано (§ 3, пп. 1, 2), что регулярное гиперполосное распределение m-мерных линейных элементов Н в $\mathrm{M}_{n,n}$ внутренним образом порождает два поля инвариантных соприкасающихся гиперквадрик [5], [8], [14] Q_{n-1} и $\widetilde{Q}_{n-1}$, определенных во второй и третьей дифференциальных окрестностях текущего элемента распределения соответственно. Поле соприкасающихся гиперквадрик $\widetilde{Q}_{n-1}$ имеет место как на гиперполосном распределении m-мерных линейных элементов Н в $\mathrm{M}_{n,n}$, так и на регулярной гиперполосе H_m в $\mathrm{M}_{n,n}$, если вместо тензора a^n_{uv} взять тензор B^n_{uv}, полученный в работах А. В. Столярова [13], [16], а поле Q_{n-1} имеет место лишь на взаимном гиперполосном распределении Н. В случае распределения Н с полем симметричного тензора Λ^n_{ij} найдены условия касания третьего порядка [14] гиперквадрик полей Q_{n-1} и $\widetilde{Q}_{n-1}$ с подмногообразием Н в $\mathrm{M}_{n,n}$ (теоремы II.5, II.6).

В § 4 второй главы изучается двойственная геометрия нормализованного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов Н в пространстве аффинно-метрической связности $\mathrm{M}_{n,n}$.

Доказано (п. 2 § 4), что нормализация $\{H^i_n, H_i\}$ регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов Н, вложенного в пространство аффинно-метрической связности $\mathrm{M}_{n,n}$ с полем локальных абсолютов с невырожденным тензором a_{ij} и допускающего обращение в нуль тензора a_{iv}, является взаимной [9] (теорема II.7). Система форм $\left\{\omega_0^J, \overset{1}{\theta}{}^i_j\right\}$ на распределении H, вложенного в пространство аффинно-метрической связности $\mathrm{M}_{n,n}$ с полем локальных абсолютов с невырожденным тензором a_{ij} и допускающего обращение в нуль тензора a_{iv}, определяет пространство аффинной связности $\overset{1}{\mathrm{A}}_{n,m}$, причем распределение нормалей первого рода $\mathrm{N}_{n-m}(H)$ голономно [8] тогда и только тогда, когда пространство $\overset{1}{\mathrm{A}}_{n,m}$ имеет нулевое кручение (теоремы II.8).

В § 4, п. 2 доказано, что нормализация $\{H_n^i, H_i\}$ регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов H, погруженного в пространство аффинно-метрической связности $\mathrm{M}_{n,n}$, индуцирует два двойственных пространства аффинной связности $\overset{1}{\mathrm{A}}_{n,m}$ и $\overset{2}{\mathrm{A}}_{n,m}$; аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ пространств $\overset{1}{\mathrm{A}}_{n,m}$ и $\overset{2}{\mathrm{A}}_{n,m}$ обобщенно сопряжены [9] относительно поля основного тензора Λ_{ij}^n вдоль любой кривой, принадлежащей базисному распределению многообразия H в $\mathrm{M}_{n,n}$ (теорема II.9).

Доказано (п. 3 § 4), что:

1) нормализация $\{T_n^i, T_i\}$ регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов H, вложенного в пространство аффинно-метрической связности $\mathrm{M}_{n,n}$ с полем соприкасающихся гиперквадрик $\tilde{Q}_{n-1}^2$, является взаимной [9] (теорема II.10);

2) в условиях теоремы II.10 нормализация $\{T_n^i, T_i\}$ регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов H индуцирует два двойственных пространства аффинной связности $\overset{1}{\tilde{\mathrm{A}}}_{n,m}$ и $\overset{2}{\tilde{\mathrm{A}}}_{n,m}$;

3) аффинные связности $\overset{1}{\tilde{\nabla}}$ и $\overset{2}{\tilde{\nabla}}$ обобщенно сопряжены [9] относительно поля основного тензора Λ_{ij}^n вдоль любой кривой, принадлежащей базисному распределению многообразия H в $\mathrm{M}_{n,n}$ (теоремы II.11).

Глава III диссертации посвящена исследованию пространства аффинной связности $\overset{1}{\mathrm{A}}_{n-1,n-1}$, индуцируемого на нормализованной гиперповерхности $V_{n-1} \subset \mathrm{M}_{n,n}$, на предмет вырождения его в пространство аффинно-метрической связности $\overset{1}{\mathrm{M}}_{n-1,n-1}$.

В § 1 найдено дифференциальное уравнение гиперповерхности V_{n-1} в пространстве аффинной связности $\mathrm{A}_{n,n}$; в разных дифференциальных окрестностях получены поля ее фундаментальных и некоторых охваченных геометрических объектов.

В § 2 третьей главы показано, что на нормализованной регулярной гиперповерхности V_{n-1} в $\mathrm{M}_{n,n}$ индуцируются две двойственные аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ пространств $\overset{1}{\mathrm{A}}_{n-1,n-1}$ и $\overset{2}{\mathrm{A}}_{n-1,n-1}$; найдены условия, при которых первое пространство аффинной связности $\overset{1}{\mathrm{A}}_{n-1,n-1}$ является $(n-1)$-мерным пространством аффинно-метрической связности $\overset{1}{\mathrm{M}}_{n-1,n-1}$ (теоремы III.1, III.2). Эти условия приведены также в случае: 1) нормализации гиперповерхности V_{n-1}, вложенной в пространство аффинно-метрической связности $\mathrm{M}_{n,n}$ без кручения; 2) аффинной нормализации регулярной гиперповерхности V_{n-1}, вложенной в плоское пространство M_n; при этом как в случае 1), так и в случае 2), пространство $\overset{1}{\mathrm{M}}_{n-1,n-1}$. Есть пространство эквиаффинной связности.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Доказано, что: 1) что при невырожденной нормализации пространства аффинной связности $\mathrm{A}_{n,n}$ индуцируются четыре двойственные между собой пространства аффинной связности $\overset{p}{\mathrm{A}}_{n,n}$, $p=1,2,3,4$; 2) аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ являются обобщенно сопряженными [9] относительно поля тензора $\overset{0}{a}_{IJ}$; 3) пространства $\overset{1}{\mathrm{A}}_{n,n}$ и $\overset{2}{\mathrm{A}}_{n,n}$ могут быть пространствами с абсолютным параллелизмом лишь одновременно; 4) если из четырех пространств аффинной связности $\overset{p}{\mathrm{A}}_{n,n}$, любые три – без кручения, то четвертое пространство также имеет нулевое кручение. Найдены условия, при которых каждое из двойственных пространств аффинной связности $\overset{p}{\mathrm{A}}_{n,n}$, индуцируемых невырожденной *гармонической* нормализацией пространства аффинно-метрической связности $\mathrm{M}_{n,n}$, является пространством аффинно-метрической связности. Показано, что если каждое из двойственных пространств $\overset{p}{\mathrm{A}}_{n,n}$, индуцируемых невырожденной *гармонической* нормализацией пространства аффинно-метрической связности $\mathrm{M}_{n,n}$, имеет нулевое кручение, то любое из них есть пространство аффинно-метрической связности тогда и только тогда, когда нормализация пространства $\mathrm{M}_{n,n}$ является полярной; при этом пространства $\overset{p}{\mathrm{A}}_{n,n}$ вырождаются в одно пространство $\overset{1}{\mathrm{A}}_{n,n}$.

2. Доказано, что регулярное гиперполосное распределение m-мерных линейных элементов H в расширенном пространстве аффинной связности $\mathrm{A}^{*}_{n,n}$

индуцирует: 1) пространство проективной связности $\overline{\mathrm{P}}_{n,n}$, двойственное пространству $\mathrm{A}^*_{n,n}$, причем пространства $\mathrm{A}^*_{n,n}$ и $\overline{\mathrm{P}}_{n,n}$ могут быть плоскими лишь одновременно; 2) многообразие $\overline{\mathrm{H}}$ в $\overline{\mathrm{P}}_{n,n}$, двойственное исходному распределению. При задании регулярного гиперполосного распределения H в $\mathrm{A}_{n,n}$ найдено условие, при выполнении которого существует пространство аффинной связности $\overline{\mathrm{A}}_{n,n}$, двойственное исходному пространству $\mathrm{A}_{n,n}$.

3. Найден критерий того, что пространство $\overline{\mathrm{P}}_{n,n}$ является пространством проективно-метрической связности $\overset{0}{\overline{\mathrm{K}}}_{n,n}$ без кручения, двойственное пространству $\mathrm{K}^*_{n,n}$ без кручения. Найдено условие, при котором пространство $\overset{0}{\overline{\mathrm{K}}}_{n,n}$ является ассоциированным с некоторым пространством аффинно-метрической связности $\overset{0}{\overline{\mathrm{M}}}_{n,n}$ без кручения; при выполнении последнего пространства $\overset{0}{\mathrm{M}}_{n,n}$ и $\overset{0}{\overline{\mathrm{M}}}_{n,n}$ являются двойственными пространствами аффинно-метрической связности.

4. Доказано, что регулярное гиперполосное распределение m-мерных линейных элементов H в $\mathrm{M}_{n,n}$ внутренним образом порождает два поля инвариантных соприкасающихся гиперквадрик Q_{n-1} и $\widetilde{Q}_{n-1}$, определенных во второй и третьей дифференциальных окрестностях текущего элемента распределения соответственно; при этом поле соприкасающихся гиперквадрик Q_{n-1} имеет место лишь на взаимном гиперполосном распределении H. В случае распределения H с полем симметричного тензора Λ^n_{ij} найдены условия касания третьего порядка гиперквадрик полей Q_{n-1} и $\widetilde{Q}_{n-1}$ с подмногообразием H в $\mathrm{M}_{n,n}$.

5. Известно, что на нормализованной регулярной гиперповерхности $V_{n-1} \subset \mathrm{A}^*_{n,n}$ индуцируются два двойственных пространства аффинной связности $\overset{1}{\mathrm{A}}_{n-1,n-1}$, $\overset{2}{\mathrm{A}}_{n-1,n-1}$. Найдены условия, при которых первое пространство аффинной связности $\overset{1}{\mathrm{A}}_{n-1,n-1}$, индуцируемое нормализацией регулярной гиперповерхности V_{n-1}, вложенной в пространство аффинно-метрической связности $\mathrm{M}_{n,n}$, является пространством аффинно-метрической связности $\overset{1}{\mathrm{M}}_{n-1,n-1}$. Эти условия приведены также в случае: 1) нормализации гиперповерхности V_{n-1}, вложенной в пространство аффинно-метрической связности $\mathrm{M}_{n,n}$ без кручения; 2) аффинной нормализации регулярной гиперповерхности V_{n-1}, вложенной в плоское пространство M_n; при этом как в случае 1), так и в случае 2) пространство $\overset{1}{\mathrm{M}}_{n-1,n-1}$, есть пространство эквиаффинной связности.

Список литературы

[1] Вагнер В. В. Обобщение тождества Риччи и Бианки для связности в составном многообразии / В. В. Вагнер // ДАН СССР. – 1945, 46. –№8. – С. 335-338.

[2] Вагнер В. В. Теория составного многообразия / В. В. Вагнер // Труды семинара по векторному и тензорному анализу / МГУ. – 1950. – Вып. 8. – С. 11-72.

[3] Евтушик Л. Е. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Л. Е. Евтушик [и др.] // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии / ВИНИТИ АН СССР. – М., 1979. – Т. 9. – 246 с.

[4] Картан Э. Пространства аффинной, проективной и конформной связности / Э. Картан. – Казань: Изд. Казанск. ун-та, 1962. – 210 с.

[5] Лаптев Г. Ф. Дифференциальная геометрия погружённых многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований / Г. Ф. Лаптев // Тр. Моск. матем. об-ва. – М., 1953. – Т. 2. – С. 275-382.

[6] Лаптев Г. Ф. Многообразия, погружённые в обобщённые пространства / Г. Ф. Лаптев // Тр. 4-го Всес. матем. съезда (1961). – Ленинград, 1964. – Т. 2. – С. 226-233.

[7] Лаптев Г. Ф. Распределения касательных элементов / Г. Ф. Лаптев // Тр. Геом. семинара / Ин-т научн. информ. АН СССР. – М., 1971. – Т. 3. – С. 29-48.

[8] Лаптев Г. Ф. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I / Г. Ф. Лаптев, Н. М. Остиану // Тр. Геом. семинара / Ин-т научн. информ. АН СССР. – М., 1971. – Т. 3. – С. 49-94.

[9] Норден А. П. Пространства аффинной связности / А. П. Норден. – М.: Наука, 1976. – 432 с.

[10] Остиану Н. М. Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева / Н. М. Остиану, В. В. Рыжков, П. И. Швейкин // Тр. Геом. семинара / Ин-т научн. информ. АН СССР. – М., 1973. – Т. 4. – С. 7-70.

[11] Остиану Н. М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. II / Н. М. Остиану // Тр. Геом. семинара / Ин-т научн. информ. АН СССР. – М., 1971. – Т. 3. – С. 96-114.

[12] Остиану Н. М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве / Н. М. Остиану // Тр. Геом. семинара / Ин-т научн. информ. АН СССР. – М., 1973. – Т. 4. – С. 71-120.

[13] Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П. К. Рашевский. – М.: Наука, 1967. – 664 с.

[14] Столяров А. В. Двойственная теория оснащенных многообразий / А. В. Столяров. – 2-е изд., доп. – Чебоксары : Изд-во Чуваш. гос. пед. ин-та, 1994. – 290 с.

[15] Столяров А. В. Пространство аффинно-метрической связности / А. В. Столяров.// Известия вузов. Математика. – 2007. – №9. – С. 71-82.

[16] Столяров А. В. Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов / А. В. Столяров // Проблемы геометрии / Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР. — 1975. — Т.7. — С. 117-151.

[17] Столяров А. В. Пространство проективно-метрической связности / А. В. Столяров.// Известия вузов. Математика. – 2003. – №11. – С. 70-76.

[18] Фиников С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии / С. П. Фиников. – М.-Л. : ГИТТЛ, 1948. – 432 с.

[19] Ehresmann C. Les connexions infinitesimals dans un éspace fibré différentiable / C. Ehresmann // Collque de Topologie (Bruxelles, 1950). – Paris, 1951. – P. 29-55.

[20] Levi-Civita T. Nozioni di parallelismo in una varieta qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvature Riemanniana / T. Levi-Civita // Rend. circ. matem. – Palermo, 1917, 42. – P. 173-205.

[21] Weyl H. Raum. Zeit, Materie / H. Weyl. – Berlin, 1918.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] *Аленина Т. Г.* К геометрии нормализованного пространства аффинной связности / Т. Г. Аленина // Труды Математического центра им. Н. И. Лобачевского : Материалы Шестой молодежной науч. школы-конф. – Казань : Изд-во Казанского мат. об-ва, 2007. – Т. 36. – С. 10–13.

[2] *Аленина Т. Г.* Геометрия невырожденной нормализации пространства аффинной связности / Т. Г. Аленина // ВИНИТИ РАН. – М., 2008. – № 236. – В2008. – 17 с.

[3] *Аленина Т. Г.* О двойственных пространствах аффинно-метрической связности / Т. Г. Аленина // Научно-информационный вестник докторантов, аспирантов, студентов. – Чебоксары : ЧГПУ им. И. Я. Яковлева, 2008. – № 1 (11). – Т. 1. – С. 5–10.

[4] *Аленина Т. Г.* Пространство аффинно-метрической связности на нормализованной гиперповерхности / Т. Г. Аленина // Дифференциальная геометрия многообразий фигур : Межвуз. темат. сб. науч. тр. – Калининград : Изд-во РГУ им. И. Канта, 2008. – Вып. 39. – С. 5–12.

[5] *Аленина Т. Г.* К двойственной геометрии регулярного гиперполосного распределения в пространстве аффинно-метрической связности / Т. Г. Аленина // Труды Математического центра им. Н. И. Лобачевского : Материалы Седьмой молодежной науч. школы-конф. – Казань : Изд-во Казанского мат. об-ва, 2008. – Т. 37. – С. 14–17.

[6] *Аленина Т. Г.* Регулярное гиперполосное распределение и двойственные пространства аффинно-метрической связности / Т. Г. Аленина // ВИНИТИ РАН. – М., 2008. – № 909. – В2008. – 19 с.

[7] *Аленина Т. Г.* Двойственные пространства аффинно-метрической связности, индуцируемые гиперполосным распределением / Т. Г. Аленина // ВИНИТИ РАН. – М., 2009. – № 140. – В2009. – 19 с.

[8] *Аленина Т. Г.* Двойственные пространства аффинно-метрической связности / Т. Г. Аленина // Известия вузов. Матем. – Казань, 2009. – № 7. – С. 65–70.

[9] *Аленина Т. Г.* Регулярное гиперполосное распределение в пространстве аффинно-метрической связности / Т. Г. Аленина // Дифференциальная геомет-

рия многообразий фигур : Межвуз. темат. сб. науч. тр. – Калининград : Изд-во РГУ им. И. Канта, 2009. – Вып. 40. – С. 11–18.

[10] *Аленина Т. Г.* Двойственные пространства аффинной связности, индуцируемые нормализацией пространства аффинно-метрической связности / Т. Г. Аленина //Материалы XLVII Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. – Новосибирск, 2009. – С. 94–95.

[11] *Аленина Т. Г.* Распределение m-мерных линейных элементов в пространстве аффинно-метрической связности / Т. Г. Аленина // Математика в образовании: сб. статей. – Чебоксары : Изд. Чуваш. гос. ун-та, 2009. – Вып. 5 – С. 312-314.

[12] *Аленина Т. Г.* Пространство аффинной связности на гиперполосном распределении в пространстве аффинно-метрической связности / Т. Г. Аленина // Научно-информационный вестник докторантов, аспирантов, студентов. – Чебоксары : ЧГПУ им. И. Я. Яковлева, 2009. – № 2 (14). – С. 3–7.

[13] *Аленина Т. Г.* Линейные связности на гиперполосном распределении в пространстве аффинно-метрической связности / Т. Г. Аленина // ВИНИТИ РАН. – М., 2009. – № 697. – В2009. – 15 с.

[14] *Аленина Т. Г.* Геометрия двойственных пространств аффинно-метрической связности / Т. Г. Аленина //Лаптевские чтения – 2009 : Тезисы докладов Международной научной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Г. Ф. Лаптева. – Тверь : Твер. гос. ун-т, 2009. – С. 5.

[15] *Аленина Т. Г.* Аффинные связности на гиперполосном распределении в пространстве аффинно-метрической связности / Т. Г. Аленина // ВИНИТИ РАН. – М., 2009. – № 797. – В2009. – 22 с.

[16] *Аленина Т. Г.* Нормализованное гиперполосное распределение в пространстве аффинно-метрической связности / Т. Г. Аленина // Труды Математического центра им. Н. И. Лобачевского : Материалы Восьмой молодежной науч. школы-конф. – Казань : Изд-во Казанского мат. об-ва, 2009. – Т. 39. – С. 123–125.

Подписано к печати 27.04.09. Формат $60 \times 84/_{16}$.
Бумага ксероксная. Печать трафаретная.
Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз. Заказ 265.

Отдел оперативной полиграфии
Чувашского государственного педагогического университета.
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.